Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Hussein Cheikh-Ali et William Hautekiet

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2019/2020

Séance 1 – Convergence simple et convergence uniforme

Rappel théorique. Soit (f_n) $(n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère trois notions de convergence :

— convergence **simple** (ou **ponctuelle**) sur $A \subseteq \mathbb{R}$: la suite (f_n) converge simplement sur A vers la fonction f si

$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui est equivalent avec $\forall x \in A \colon f_n(x) \to f(x)$.

— convergence **uniforme** sur $A \subseteq \mathbb{R}$: la suite (f_n) converge uniformément sur A vers la fonction f si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} \colon \forall x \in A\ \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui est equivalent avec $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$.

— convergence **uniforme sur tout compact** de $A \subseteq \mathbb{R}$: la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de A vers la fonction f si

$$\forall K \subseteq A \text{ compact } \forall \varepsilon > 0\ \exists N_{\varepsilon,K} \in \mathbb{N} \colon \forall x \in K\ \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui est equivalent avec $\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ pour tout compact $K \subseteq A$.

Questions théoriques. Réfléchissez sur les questions suivantes avant de commencer aux exercices.

— Peut-on comparer ces trois convergences ? Quelle est la plus forte ?

— Comment exprime-t-on (avec quantificateurs) que la suite (f_n) ne converge *pas* vers f simplement/uniformément ?

Exercice 1. *On considère les fonctions*

$$f_n(x) = (1 - x^4)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) la suite (f_n) converge-t-elle sur $[-1, 1]$? Si oui, vers quelle fonction ?

b) la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

c) la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur tout compact de $]0, 1]$?

Exercice 2. *On considère une suite de fonctions définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \textit{pour } \frac{1}{n} \le x \le 1, \\ 1, & \textit{pour } x = 0, \\ 1 - nx, & \textit{pour } 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

a) la suite (f_n) converge-t-elle sur $[0,1]$? Si oui, vers quelle fonction ?

b) la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$? Et sur $]0,1]$?

c) la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur tout compact de $]0,1]$?

Exercice 3. *Soit*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \textit{pour } n < x < n+1, \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

a) la suite (f_n) converge-t-elle sur $\mathbb{R}$?

b) la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

c) la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$?

Exercice 4. *Etudier la convergence sur $[0,1]$ de la suite définie par*

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad \textit{et} \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Exercice 5. *Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}, \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que la suite $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et déterminer la fonction limite.

b) la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

c) la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,\infty[$?

d) la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur tout compact de $]0,\infty[$?

Exercice 6. *Etudier la convergence sur $]0,\pi[$ de la suite de fonctions définie par*

$$f_n(x) = \frac{1 - \cos nx}{nx^2} \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$